Menemui Matematik (Discovering Mathematics)
Vol. 34, No. 2: 49 – 56 (2012)

Interpolasi Data Pada Satah Menggunakan Lengkung Kubik Bezier Nisbah
(Interpolation of Planar Data Points Using Rational Cubic Bezier Curves)

Hasmidar Abdul Jalal[1] & Jamaludin Md Ali[2]
[1,2]*Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia*
[2]*jamaluma@cs.usm.my*

ABSTRAK

Dalam kertas kerja ini, kita akan berbincang mengenai interpolasi data pada satah dengan menggunakan lengkung kubik Bezier nisbah. Untuk menjanakan suatu lengkung yang menarik dengan kelicinan yang memuaskan, cebisan lengkung mesti bersambung dengan keselanjaran tertentu. Keselanjaran yang kita pertimbangkan ialah jenis G^1 dan G^2. Kita juga akan membincangkan syarat yang diperlukan setiap cebisan sebelum kita menyambungnya. Syarat yang dikenakan dikenali sebagai syarat G^1 dan G^2 Hermite. Suatu penggunaan mudah kaedah yang dicadangkan ialah untuk menjana fon Arab memenuhi keselajaran yang ditentukan.

Katakunci:Interpolasi data, lengkung Bezier nisbah, syarat Hermite

ABSTRACT

In this paper we will discuss about interpolation of planar data points by using rational cubic Bezier curve. To generate a curve with a better and satisfactory smoothness, the curve segments must be connected with certain amount of continuity. The continuity that we will consider is of type G^1 and G^2 continuity. We will also discuss about the conditions that need to be fulfilled at each curve segments before we connect them. The conditions considered are known as the G^1 Hermite condition and G^2 Hermite condition. A simple application of the proposed method is to generate an Arabic font satisfying the required continuity.

Keywords: Data interpolation, rational Bezier curves, Hermite conditions.

PENGENALAN

Penjanaan suatu lengkung licin melalui titik data merupakan masalah yang berabad lamanya. Adalah sukar difahami bagaimana lengkung yang dilukis oleh pelukis muncul lebih baik dari yang dapat dijana secara automatik oleh algoritma berkomputer (Piegl, 1987). Namun begitu melukis bentuk secara manual tetapi jitu adalah sangat merumitkan dan mengambil masa yang lama. Secara lazimnya pengguna mahu menjana lengkung dengan cepat tetapi mudah dikawal dan senang dihitung. Dalam grafik berkomputer ini adalah masalah utama dan merupakan motivasi untuk mereka bentuk lengkung. Lengkung yang dimaksudkan termasuklah rekaan bentuk fon, menggambarkan imej pada skrin, lukisan kartun berkomputer dan visualasi data (Sarfraz, 2002).

Sarfraz dan Razzak (2002) telah mengemukakan suatu kaedah mudah dan berkesan untuk merekabentuk lengkung yang optimal untuk paparan garisluaran dengan lengkung kubik Bezier dan Hermite. Kewujudan parameter kawalan boleh menghasilkan bentuk yang lebih sesuai. Sarfraz (2002) mencadangkan kaedah efektif dan lebih ekonomikal untuk menjana lengkung licin yang menyesuaikan data berdigit yang besar. Kaedah dan perbagai idea untuk merekabentuk lengkung termasuklah interpolasi titik hujung dan titik perantara. Cebisan lengkung yang dijana kemudiannya disambung dengan kelicinan tertentu dan paling senang adalah kelicinan C^1.

Tambahan lagi Piegl (1987) mencadangkan suatu algoritma yang menggabungkan teknik interaktif dan kaedah interpolasi untuk membantu perekabentuk menghasilkan lengkung interpolasi yang lebih menarik. Piegl mencadangkan penjanaan lengkung interpolasi yang merupakan gabungan cebisan lengkung Bezier kuadratik dan kubik yang dikawal secara setempat dengan menggunakan parameter bentuk.

Dalam pemodelan geometri dan grafik berkomputer, lengkung nisbah berparameter telah mendapat perhatian kerana kelebihannya. Terutama sekali lengkung nisbah ini dapat mewakili lengkung keratan kon dan agak hebat untuk menjanakan lengkung bebas. Lengkung nisbah seringkali dipakai dalam perekaan berbagai bentuk objek. Dalam rekaan bentuk kapal, atau kereta lengkung nisbah sering di gunakan. Bahkan bentuk-bentuk yang kompleks gabungan cebisan lengkung nisbah berparameter digunakan kerana secebis lengkung tidak mempunyai kebebasan yang tinggi. Apabila cebisan-cebisan ini disambung yang perlu dijaga ialah keselanjaran serta kelicinan dari satu cebis kesatu cebis. Maka dalam kertas kerja ini perbincangan adalah tentang keselanjaran dan kelicinan cebisan yang disambung. Perbincangan kertas ialah mendapatkan syarat penyambungan dua lengkung nisbah Bezier kubik berparameter. Keselanjaran yang lazim ditekankan ialah G^1 dan G^2.

LENGKUNG BEZIER

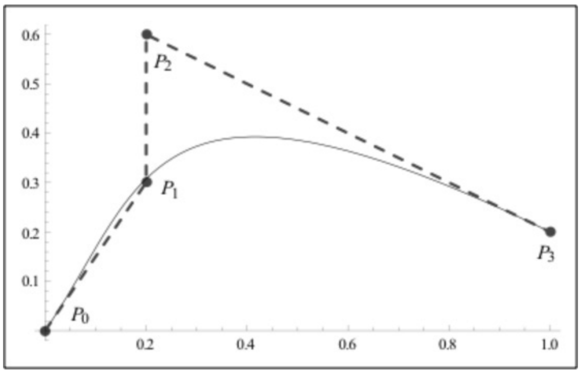
Lengkung Bezier tak nisbah adalah suatu lengkung berparameter P(t) ditakrif sebagai (Solomon 2002)

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)P_i, \quad t \in [0,1], \; i = 0.1,...,n$$

dengan $(n+1)$ titik kawalan $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$ dan

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}; \quad t \in [0,1], \; i = 0.1,...,n$$

dikenali sebagai polynomial Bernstein. Dalam kertas kerja ini kita hanya tumpukan kepada kubik Bezier sahaja yakni nilai n ialah 3. Rajah 1 ialah satu contoh lengkung kubik Bezier.



Rajah 1: Lengkung kubik Bezier

LENGKUNG BEZIER NISBAH

Dalam rekabentuk lazimnya kita memerlukan lengkung yang robust tetapi mudah dari segi matematiknya. Dan juga lengkung berkenaan dapat mewakili keratan kon terutamnya bulatan yang kerap dipakai dalam rekabentuk. Justeru lengkung Bezier tak nisbah diperluaskan kepada lengkung Bezier nisbah yang lebih luas penggunaanya.

Takrif

Suatu lengkung Bezier nisbah $R(t)$ berdarjah n ditakrif sebagai

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) w_i P_i}{\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) w_i}, \qquad w_i > 0$$

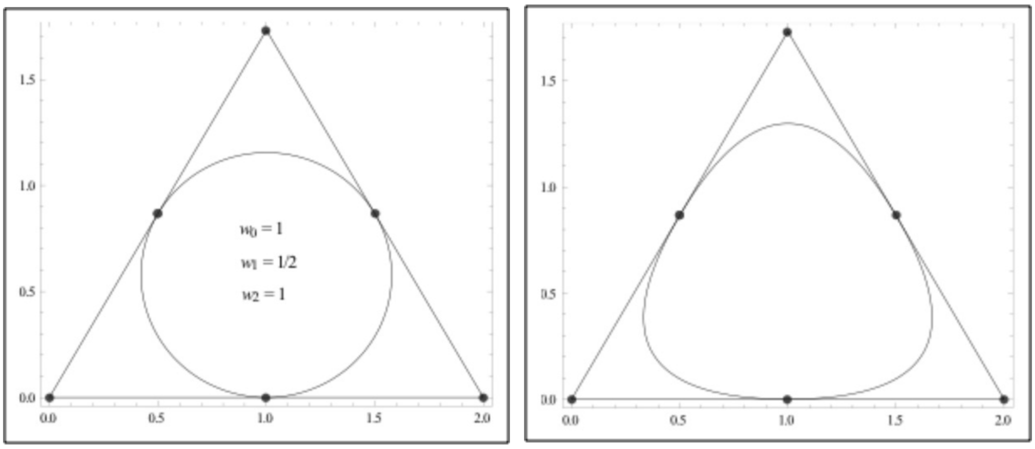
dan

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, ..., n$$

dengan $B_{i,n}(t)$ ialah asas Bernstein dan w_i adalah pemberat terhadap titik kawalan, P_i. Kita kekangkan nilai pemberat supaya positif untuk memastikan pembawah $R(t)$ adalah sentiasa positif pada selang $t \in [0,1]$.

Dalam kertas kerja ini kita hanya tumpukan kepada darjah 2 dan 3 sahaja.

Rajah 2 (a) adalah bulatan yang terhasil dengan mencantumkan beberapa cebisan Bezier nisbah kuadraik manakala Rajah 2 (b), hanya cantuman beberapa lengkung Bezier tak nisbah yang tak mampu menakrifkan bulatan.

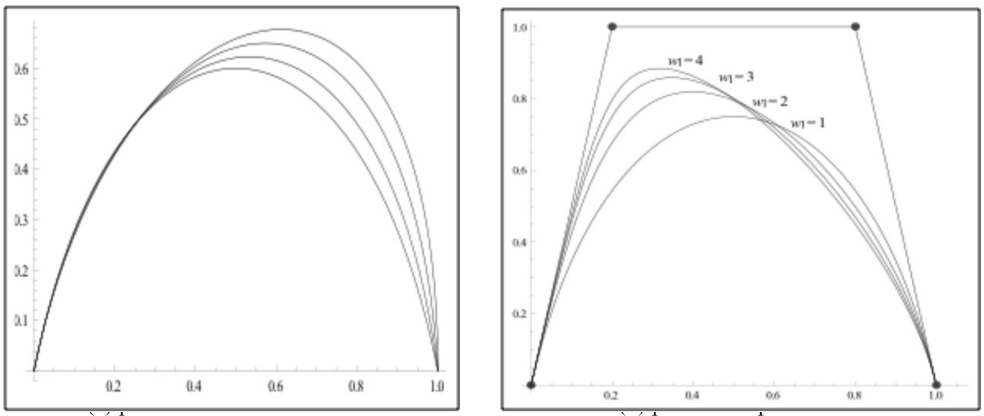


(a) bulatan (b) bukan bulatan

Rajah 2: Illustrasi kemampuan lengkung Bezier Nisbah

Dalam RBG (rekabentuk grafik) lazimnya kita memerlukan lengkung yang lebih teguh dan dapat menjanakan lengkung yang berlengkuk balas. Justeru kita meningkatkan dalam bentuk kubik kerana ia adalah paling mudah.

Disamping mengubah kedudukan titik kawalan kita juga dapat menjana pelbagai bentuk lengkung dengan mengubah nilai pemberat. Rajah 3 adalah pelbagai contoh lengkung nisbah Bezier kubik.



Rajah 3: Lengkung nisbah Bezier kubik

Memandangkan lengkung kubik adalah lebih banyak kebebasan maka ia lebih sesuai untuk menjanakan lengung gabungan yang memenuhi syarat tertentu. Syarat yang kita akan lihat ialah lengkung cantuman ini adalah bersifat licin dengan keselajaran G^1 dan G^2. Kita akan melihat terlebih dahulu syarat Hermite.

SYARAT HERMITE

Kita akan bincangkan dua syarat Hermite dalam bahagian ini. Syarat Hermite merupakan syarat yang penting dalan RBG. Lazimnya kita hanay diberikan titik data dan dari data tersebut kita boleh menjanakan lengkung yang melalui data tersebut. Maka lazimnya lengkung yang terjana bersifat G^1 dan G^2. Kita bincang secebis lengung dahulu.

Syarat Hermite G^1

Biar $P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1)$ sebagai titik hujung $T_0 = (m_0, n_0), T_1 = (m_1, n_1)$ sebagai tangen nya yang sepadan maka, suatu lengkung nisbah Bezier kubik diberi sebagai

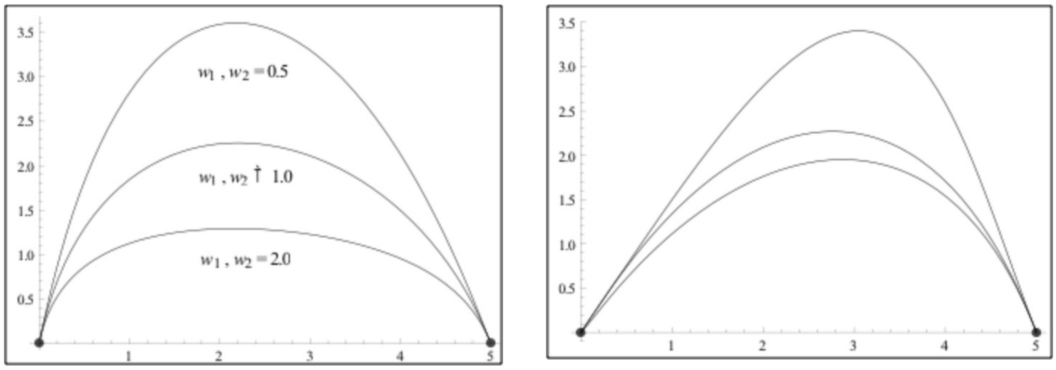
$$R(t) = \frac{(1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 w_1 Q_1 + 3t^2(1-t) w_2 Q_2 + t^3 P_1}{(1-t)^3 + 3t(1-t)^2 w_1 + 3t^2(1-t) w_2 + t^3}; \ t \in [0,1] \text{ dan } w_1, w_2 \geq 0 \tag{1}$$

$$R(0) = P_0 \text{ dan } R(1) = P_1; \text{ dan } R'(0) = T_0 \text{ dan } R'(1) = T_1$$

Dengan syarat yang diberikan kita memperolehi

$$Q_1 = P_0 + \frac{T_0}{3w_1} \text{ dan } Q_2 = P_1 - \frac{T_1}{3w_2} \tag{2}$$

Rajah 4 adalah lengkung yang kita perolehi dengan mengubah tangen pada titik hujung tetapi mengekalkan nilai pemberat iaitu nilai pemberat adalah satu.



(a) pemberat berubah (b) tangen berubah

Rajah 4: Kesan nilai pemberat dan tangen

Syarat Hermite G^2

Andaikan syarat Hermite dipenuhi, cebisan lengkung disebut memenuhi syarat Hermite jika syarat titik hujung dipenuhi iaitu

$$\kappa(0) = \frac{1}{r_0} \quad \text{dan} \quad \kappa(0) = \frac{1}{r_1} \tag{3}$$

dengan dan dikenali sebagai jejari kelengkungan lengkung. $\kappa(t)$ adalah fungsi kelengkungan $t \in [0,1]$

Dan kelengkungan ini diberi oleh rumus

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{|R'(t)xR''(t)|}{\|R'(t)\|^3} \\ &= \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Dengan

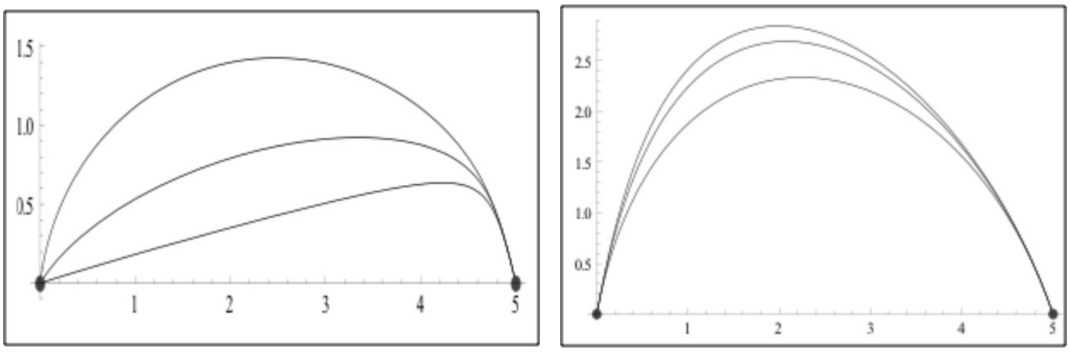
$$\begin{aligned} R(t) &= (x(t), y(t)) \\ R'(t) &= (x'(t), y'(t)) \\ R''(t) &= (x''(t), y''(t)) \end{aligned}$$

Dengan ini jika jejari kelengkungan diberi maka nilai pemberat dapat dikira dari persamaan (2) dan persamaan (3) dan ianya adalah

$$w_1 = \frac{-m_1^2\sqrt{m_1^2 + n_1^2} - n_1^2\sqrt{m_1^2 + n_1^2} + 2m_1n_0r_1 - 2m_0n_1r_1}{6r_1(n_1x_0 - n_1x_1 - m_1y_0 + m_1y_1}$$

$$w_2 = \frac{m_0^2\sqrt{m_0^2 + n_0^2} + n_0^2\sqrt{m_0^2 + n_0^2} - 2m_1n_0r_0 - 2m_0n_1r_0}{6r_0(n_0x_0 - n_0x_1 - m_0y_0 + m_0y_1}$$

$P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1)$ sebagai titik hujung dan, $T_0 = (m_0, n_0), T_1 = (m_1, n_1)$ tangen titik hujung. Rajah 5 menunjukkan beberapa lengkung terhasil dengan jejari kelengkungan yang berbeza.



(a) Jejari kelengkungan tetap (b) Jejari kelengkungan berubah

Rajah 5: Lengkung bezier kubik nisbah dengan syarat yang berbeza

CONTOH INTERPOLASI DATA

Andaikan diberi set data maka kita hendak menjana lengkung melalui data tersebut. Tetapi lazimnya jejari kelengkungan dan tangen perlu kita hitung sebelam penjaan dapat dibuat kerana lengkung yang kita bina bersifat tempatan, yakni cebisan lengkung disambung.

Menentukan Tangen dan Jejari Kelengkungan

Untuk menentukan tangen, kita akan menggunakan kaedah yang diperkenalkan oleh Sarfraz (2002). Untuk lengkung terbuka

$$T_0 = 2(P_1 - P_0) - (P_2 - P_0)/2,$$
$$T_n = 2(P_n - P_{n-1}) - (P_n - P_{n-2})/2,$$
$$T_i = a_i(P_i - P_{i-1}) + (1 - a_i)(P_{i+1} - P_i), i = 1, ..., n-1:$$

Untuk lengkung tertutup pula,

$$P_{-1} = P_{n-1}, P_{n+1} = P_i$$
$$T_i = a_i(P_i - P_{i-1}) + (1 - a_i)(P_{i+1} - P_i), i = 1, ..., n$$

dengan

$$a_i = \frac{\| P_{i+1} - P_i \|}{\| P_{i+1} - P_i \| + \| P_i - P_{i-1} \|}, i = 0,,,n$$

Manakala untuk jejari kelengkungan kita cuma menggunakan sifat geometri, iaitu bulatan tiga titik. Jika diberi

$P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1)$ dan maka dari Weisstein (2011) jejari

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{\delta}{\alpha}} \tag{4}$$

Dengan pusat bulatan diberi sebagai

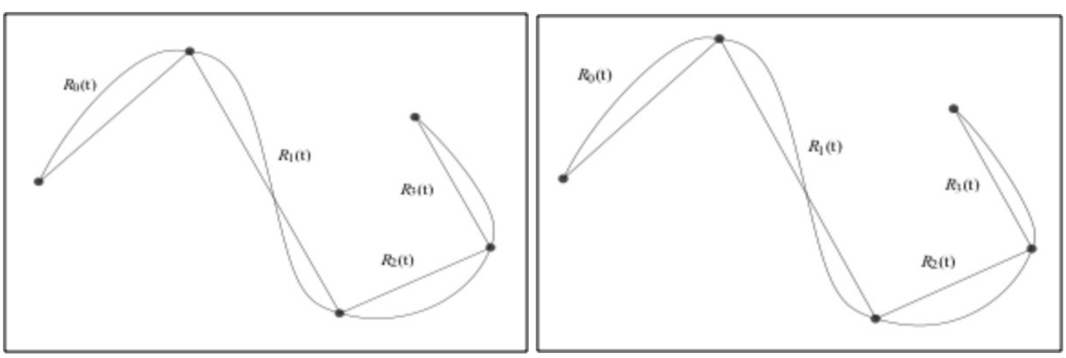
$$x = \frac{\beta}{2\alpha}, \quad y = \frac{\gamma}{2\alpha}, \tag{5}$$

Yang

$$\beta = \begin{bmatrix} x_0^2 + y_0^2 & y_0 & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} x_0^2 + y_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix},,$$

$$\delta = \begin{bmatrix} x_0^2 + y_0^2 & x_0 & y_0 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} x_0 + y_0^2 & 1 \\ x_1 + y_1^2 & 1 \\ x_2 + y_2^2 & 1 \end{bmatrix},$$

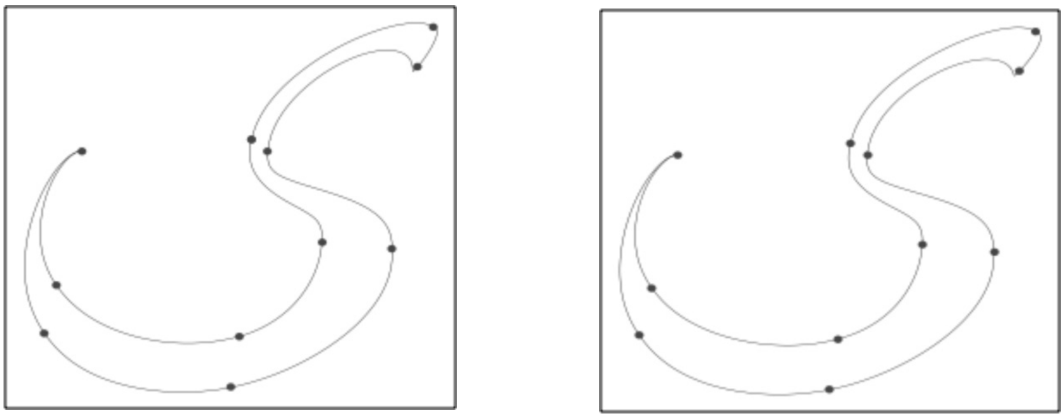
Rajah 6 menunjukkan lengkung terhasil yang pertama dan kedua masing-masing adalah bersifat G^1 dan G^2



(a) Sifat G^1 (b) Sifat G^2

Rajah 6: Lengkung Bezier nisbah dengan sifat kekangannya

Rajah 7 pula adalah ilustrasi fon yang memuasi sifat-sifat yang diperlukan.



(a) Sifat G^1 (b) Sifat G^2

Rajah 6: Lengkung Bezier Nisbah untuk 'yaa' dengan sifat kekangannya

KESIMPULAN

Kita telah menunjukkan bagaimana padunya lengkung Bezier nisbah kubik dalam rekabentuk lengkung. Dua jenis keselanjaran dibentangkan. Walaupun paparan hampir serupa namun dalam situasi tertentu bergantung kepada pengguna keselajaran yang rendah sudah memadai.

PENGHARGAAN

Penulis pertama ingin memberi penghargaan kepada Pusat Pengajain Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia yang memberi sokongan untuk penyelidikan disertasinya.

RUJUKAN

Piegl, L. (1987). Interactive data interpolation by rational Bezier curves. *Computer Graphics and Applications, IEEE* **7** (4), 45-58.

Salomon, D. (2005). *Curves and Surfaces for Graphics*. New York: Springer-Verlag Inc.

Sarfraz, M. and Razzak, M. F. A. (2002). An algorithm for automatic capturing of the font outlines. *Computers & Graphics* **26**(5), 795-804.

Sarfraz, M. (2002). Fitting curve to planar digital data. *Sixth International Conference on Information Visualization, 2002.* 633- 638.

Weisstein, E. W. (2011). *Bernstein Polynomial from Mathworld* [Online]. [Accessed 8th December 2010]. Available from World Wide Web: http://mathworld.wolfram.com/BernsteinPolynomial.html