

Lengkungan Peralihan Bentuk S and C Menggunakan Satu Segmen Lengkung Bezier Kuartik (S and C-Form Transition Curves using a Single Quartic Bezier Curve)

Azhar Ahmad¹, Noor Afzalina Azmee² & Jamaludin Md Ali³

^{1,2}*Department of Mathematics, Faculty of Sciences and Mathematics, UPSI,
35900 Tanjung Malim, Perak.*

³*School of Mathematical Sciences, USM, 11800 Penang*

¹*azhar.ahmad@fsmt.upsi.edu.my, ²afzalina@fsmt.upsi.edu.my, ³jamaluma@cs.usm.my*

ABSTRACT

In this paper, we discuss a method of constructing the transition curve that joins the two circles where the radii and the distance between those circles are given. The construction of the transition curve is limited to S and C form by using a parametric polynomial curve representation, which is known as the quartic Bezier curve. By using this method, we can assure that the transition curves are obtained in a direct and simple manner. Which are free from cusps, loops and unwanted inflection points. In addition, we manage to obtain the monotonically curvature condition for S-form. Generally, these two transition curves have geometric continuity of G^2 at the end points. Such property is useful in the several Computer Aided Design (CAD) applications, i.e. industrial product designs, trajectory of non-holonomic robot, and the horizontal railways and highways design. Since the quartic Bezier is also a parametric polynomial base so it is conveniently adopted to CAD systems which obviously are based on NURBS (nonuniform rational B-splines).

Keywords: Transition curve, quartic Bezier curve, geometric continuity G^2

ABSTRAK

Kertas ini membincangkan satu kaedah pembinaan lengkung peralihan yang menghubungkan dua bulatan dengan jejari serta jarak di antara kedua-dua bulatan tersebut telah diketahui. Pembinaan ini terhad kepada lengkung peralihan berbentuk S dan C melalui penggunaan perwakilan polinomial berparameter yang dikenali sebagai Bezier kuartik. Dengan kaedah pembinaan yang diperkenalkan ini, kita mampu memperolehi lengkung peralihan secara terus, mudah serta bebas daripada rupabentuk yang mengandungi juring, gelung dan titik lengkokbalas yang tidak diperlukan. Tambahan pula, bagi lengkung bentuk S, kita berjaya memperolehi satu syarat untuk lengkung peralihan mempunyai kelengkungan yang monoton. Pada amnya, kedua-dua lengkung peralihan ini memiliki keselanjaran geometri G^2 pada titik-titik hubungannya. Dengan sifat tersebut maka ia amat sesuai untuk aplikasi tertentu di dalam Rekabentuk Berbantu Komputer (RBK), umpamanya rekabentuk produk industri, trajektori robot non-holonomic, serta rekabentuk mendatar landasan keretapi dan lebuh raya. Oleh kerana Bezier kuartik merupakan suatu perwakilan polinomial, maka adalah mudah bagi kita mengabungjalinkan ia ke dalam sistem RBK yang kebanyakannya berasaskan perwakilan NURBS (nonuniform rational B-splines)

Katakunci: : Lengkung peralihan, Lengkung kuartik bezier, keselanjaran geometri G^2

PENGENALAN

Usaha bagi menghasilkan perwakilan objek geometri yang efisien dan reka bentuk lengkungan/permukaan yang licin serta baik (*fair*) sentiasa menjadi fokus utama di dalam bidang Rekabentuk Geometri Berbantu Komputer (RGBK). RGBK merupakan satu disiplin matematik yang berkait rapat dengan aspek-aspek pengkomputeran bagi objek-objek geometri (Farin, 1997). Elemen utama yang menjadi tumpuan kajian dibidang ini adalah perwakilan lengkungan dan permukaan yang berasaskan polinomial berparameter. Salah satu perwakilan utama yang penting digunapakai bagi tujuan penjanaaan lengkungan dan permukaan adalah perwakilan Bezier (Marsh, 1999). Di mana perwakilan Bezier yang berdarjah rendah seperti kuadratik, kubik dan kuartik adalah yang paling popular. Ini disebabkan kerana analisa geometri pembezaan ke atas perwakilan tersebut adalah mudah untuk dijalankan. Juga segmen lengkung yang terhasil didapati mudah dijangkakan dan mampu menghindar rupabentuk yang kompleks. Bagi perwakilan yang berdarjah lebih besar daripada 2, segmen lengkung yang terjana akan memiliki bentuk-bentuk seperti cembung, juring, gelung dan/atau titik lengkokbalas. Melalui penggunaan geometri pembezaan, kita dapat menentukan sama ada segmen yang direka bentuk telah memenuhi syarat-syarat geometri yang telah ditetapkan. Syarat-syarat geometri adalah perlu untuk menghasilkan segmen lengkungan yang berkualiti dan mudah dijanakan. Antara hasil yang ingin dicapai adalah lengkungan yang licin, iaitu merujuk kepada darjah keselanjaraan yang wujud pada titik-titik hubungan. Umumnya, singkatan G^2 digunakan bagi merujuk darjah ke- n keselanjaraan secara geometri.

Lengkung peralihan adalah berguna di dalam beberapa aplikasi Rekabentuk Berbantu Komputer (RBK). Menurut Meek & Walton (1999), penggunaannya boleh ditemui dalam usaha menghubungkan dua lengkungan yang telah diketahui dengan satu segmen peralihan yang licin, juga pada pembinaan skema font serta boleh digunakan bagi pembaikan sudut tajam. Lengkung peralihan yang memiliki darjah keselanjaraan geometri G^2 pada titik-titik hubungannya akan memberi paparan visual yang lebih licin. Keselanjaraan G^2 adalah merujuk kepada keadaan tangen serta kelengkungan pada titik-titik hujung bagi suatu lengkung peralihan adalah sama dengan tangen dan kelengkungan pada bulatan yang dihubungkannya. Contoh berkaitan dengan penggunaannya adalah seperti rekabentuk produk-produk konsumer, di mana pihak pengeluar selalunya mengambil kira aspek-aspek estetik pada produk yang dihasilkan. Merujuk kepada kepentingan fungsinya pula, terdapat penggunaan yang aktif seperti di dalam reka bentuk mendatar laluan lebuhraya, landasan keretapi serta pada trajektori kenderaan automotik terkawal. Penggunaan lengkung peralihan pada reka bentuk ini telah lama digunakan dan amat dianjurkan oleh banyak pihak. Secara tradisinya, fungsi clothoid, fungsi trigonometri dan segmen bulatan telah lama digunapakai dalam kebanyakan kes berkenaan, namun ia tidak memadai bagi perjalanan yang licin untuk suatu objek berkelajuan tinggi. Disebabkan fungsi-fungsi yang dinyatakan tadi tergolong sebagai fungsi *transcendental*, maka usaha untuk mengabungjalinkan dengan kebanyakan sistem RBK yang sedia ada adalah sukar untuk dilakukan. Oleh yang demikian penggunaan perwakilan Bezier merupakan satu alternatif yang baik bagi tujuan tersebut.

Merujuk kepada kajian terdahulu, penggunaan dua segmen bulatan serta dua segmen lingkaran clothoid untuk pembinaan lengkungan peralihan ada dibincangkan dalam Walton & Meek (1989). Terdapat penggunaan dua lingkaran kubik Bezier (Walton & Meek, 1996a; 1996b) dan dua lingkaran kuintik Pythagorean hodograph (PH) bagi tujuan yang sama. Selanjutnya usaha yang serupa melalui peningkatan pada darjah kebebasan lingkaran kubik Bezier ada dijelaskan di dalam Walton *et al.* (2003a), Habib & Sakai (2003a), Kang & Jamaludin (2003) dan Walton & Meek (2004; 2007). Azhar, Gobithasan & Jamaludin (2007) telah memperkenalkan lingkaran kuartik Bezier bagi pembinaan lengkung peralihan G^2 di antara dua bulatan yang terpisah. Pembinaan dengan menggunakan hanya satu segmen kubik Bezier pula dibincangkan oleh Walton & Meek (2003b) dan Habib & Sakai (2003b).

Tujuan kertas ini adalah untuk mengemukakan satu kaedah membina lengkung peralihan secara terus dan mudah dengan menggunakan satu segmen daripada perwakilan kuartik Bezier. Hasil kajian

adalah satu rumus yang menjana titik-titik kawalan yang bersesuaian untuk satu lengkung kuartik yang unik serta memiliki keselajaran G^2 pada kedua-dua hujungnya. Oleh kerana batasan ruang, kami tidak membincangkan profil kelengkungan bagi kedua-dua bentuk S dan C yang diperolehi. Latarbelakang, tatatanda dan ketetapan yang digunakan dalam kertas ini dinyatakan secara ringkas dalam Seksyen 2. Seksyen 3 pula memperkenalkan kaedah bagi pembinaan lengkung peralihan yang mana ia dapat disimpulkan melalui dua teorem. Seterusnya, contoh-contoh berangka beserta Rajah-Rajah yang terhasil ada ditunjukkan pada Seksyen 4 dan diakhiri dengan rumusan pada Seksyen 5.

LATARBELAKANG, TATATANDA DAN KETETAPAN

Simbol dengan huruf besar condong mewakili fungsi nilai vektor, sementara huruf kecil condong dan karektor Greek pula adalah pembolehubah, parameter atau pemalar. Andaikan dua vektor satahan P dan Q , hasil darab skalar diwakili dengan $P \cdot Q = |P| |Q| \cos \theta$. Manakala hasil darab vektor pula diwakili dengan $P \times Q = |P| |Q| \sin \theta$ dan ia berkuantiti skalar (Artin, 1957). Sudut θ adalah bernilai positif apabila dijanakan daripada P kepada Q dan bernilai negatif untuk sebaliknya. Daripada Farin (1997), rumus Bezier kuartik dengan parameter t , $0 \leq t \leq 1$, diberi oleh

$$Z(t) = \sum_{i=0}^4 B_i \binom{4}{i} (1-t)^{4-i} t^i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (1)$$

Di mana B_i adalah titik kawalan dan $\binom{4}{i} (1-t)^{4-i} t^i$ adalah fungsi penjana yang dikenali sebagai polinomial Bernstein. Manakala yang berikut pula adalah rumusan kelengkungan bagi sebarang lengkung satahan $Z(t)$ (Marsh, 1999),

$$\kappa(t) = \frac{Z'(t) \times Z''(t)}{\|Z'(t)\|^3} \quad (2)$$

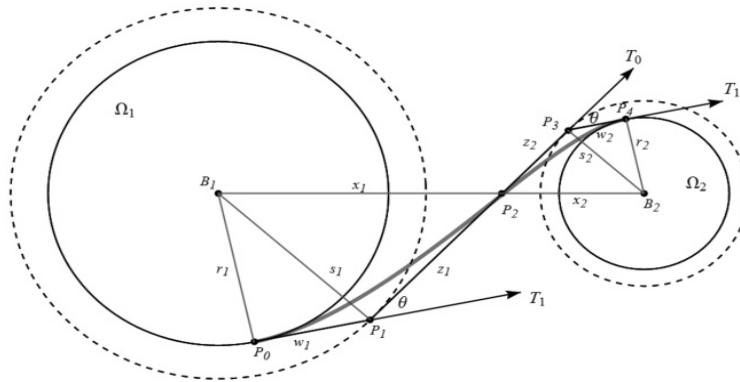
Oleh kerana penyebut $\|Z'(t)\|^3$ adalah sentiasa positif, maka tandaan $\kappa(t)$ ditentukan oleh pengangkanya. Suatu lengkung dikatakan dibengkokkan ke arah kiri apabila $\kappa(t)$ bernilai positif dan bernilai negatif jika dibengkokkan ke arah kanan. Manakala $r(t) = 1/\kappa(t)$ dikenali sebagai jejari bulatan *osculating* pada lengkung.

KAEDAH PEMBINAAN LINGKARAN PERALIHAN DI ANTARA DUA BULATAN

Berikutnya penjelasan ringkas akan kaedah pembinaan kedua-dua bentuk lengkung peralihan yang menggunakan teknik tranformasi mudah.

Lengkung Peralihan Bentuk-S

Andaikan diberi dua bulatan Ω_1 , Ω_2 , dengan masing-masing berpusat pada B_1 , B_2 dan berjajari r_1 , r_2 . Untuk pembinaan lengkung peralihan ini, kami mencadangkan penggunaan tranformasi yang terdiri daripada pembesaran negatif bersekala $k = r_1 / r_2$, dengan pusat pembesaran adalah pada sebagaimana yang ditunjukkan pada Rajah 1.



Rajah 1: Lengkung peralihan bentuk-S

Di sini kami hanya membincangkan pembinaan lengkung peralihan yang menghubungkan Ω_1 kepada Ω_2 , bermula dengan kelengkungan positif kepada kelengkungan negatif. Manakala bagi bentuk yang sebaliknya boleh diperolehi dengan cara yang serupa, juga boleh diperolehi melalui proses tranformasi iaitu refleksi pada garis B_1B_2 . Dengan menggunakan beberapa ketetapan berikut, pembinaan lengkung peralihan akan menjadi lebih mudah difahami seterusnya dijanakan oleh pengguna. Pertamanya, ditetapkan bahawa tiga titik kawalan dalaman iaitu P_1 , P_2 dan P_3 adalah kolinear. Garis lurus P_1P_3 adalah tangen sepunya bagi kedua-dua bulatan dengan jarak serenjang daripada pusat bulatan adalah s_1 dan s_2 . Hasilnya titik P_2 diperolehi daripada

$$P_2 = \frac{B_1r_2 + B_2r_1}{r_1 + r_2} \quad (3)$$

Kedua, diperkenalkan dua vektor unit T_0 dan T_1 seperti berikut;

$$T_0 = \frac{P_3 - P_1}{|P_3 - P_1|}, \quad T_1 = \frac{P_1 - P_0}{|P_1 - P_0|} = \frac{P_4 - P_3}{|P_4 - P_3|}, \quad (4)$$

di mana $|T_0 \wedge T_1| = \sin \theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Selanjutnya ditandakan beberapa parameter bagi mempermudah pengiraan iaitu $x_1, x_2, w_1, w_2, z_1, z_2$ yang mempunyai hubungan berikut,

$$k = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (5)$$

Akhirnya, kita dapat menulis titik-titik kawalan P_k , $k=0,1,3,4$, dalam sebutan-sebutan parameter diatas. Hasil daripada manipulasi maklumat yang ada dan analisis menggunakan (1)-(5), maka kita akan memperoleh syarat bagi lengkung peralihan bentuk-S. Syarat yang cukup untuk memperoleh satu lengkung peralihan G^2 dapat diringkaskan seperti berikut.

Teorem 3.1.1 Diberi dua bulatan Ω_1 , Ω_2 dengan masing-masing berpusat pada B_1 , B_2 dan berjari r_1 , r_2 . Jika titik-titik kawalan bagi Bezier kuartik memenuhi syarat berikut;

$$P_s = \frac{B_1r_2 + B_2r_1}{r_1 + r_2}, \quad P_0 = P_1 - w_1T_1, \quad P_1 = P_2 - z_1T_0, \quad P_3 = P_2 + z_2T_0, \quad P_4 = P_3 + w_2T_1 \quad (6)$$

dengan

$$T_0 = \left\langle \frac{\langle z_1 + z_2, s_1 + s_2 \rangle \cdot (B_2 - B_1)}{(B_2 - B_1) \cdot (B_2 - B_1)}, \frac{\langle -(s_1 + s_2), z_1 + z_2 \rangle \cdot (B_2 - B_1)}{(B_2 - B_1) \cdot (B_2 - B_1)} \right\rangle, T_1 = \langle \langle \gamma, \Gamma \rangle \cdot T_0, \langle -\Gamma, \gamma \rangle \cdot T_0 \rangle \quad (7)$$

di mana

$$\Gamma = -\frac{w_2}{s_2}, \quad \gamma = -\frac{r_2}{s_2}, \quad z_2 = \sqrt{x_2^2 - s_2^2}, \quad w_2 = \sqrt{s_2^2 - r_2^2},$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{32}(7r_2^2 + r_2 \sqrt{49r_2^2 + 576x_2^2})} \quad (8)$$

Maka (1) adalah satu segmen lengkungan berbentuk S yang unik dengan kelengkungan daripada positif kepada negatif serta memiliki berkeselajaran G^2 pada titik-titik hujungnya.

Didapati bahawa penyelesaian dengan menggunakan teorem di atas adalah unik, ia tertakrif apabila $r_2 s_2 x_2$, selanjutnya memberi kita syarat $\|B_1 - B_2\|(r_1 + r_2)$ yang memberi maksud kedua-dua bulatan tidak boleh bersentuhan. Rajah 1 menunjukkan satu contoh lengkungan peralihan berbentuk S. Melalui analisis lanjut ke atas $\kappa'(t)$ kita akan memperolehi keadaan kelengkungan yang monoton apabila jejari bagi bulatan-bulatan yang diberi memenuhi selang $2/7 \leq r_1/r_2 \leq 7/2$.

Lengkung Peralihan Bentuk-C

Dengan kaedah yang serupa sebagaimana seksyen 3.1, kita dapat membina satu lengkungan peralihan berbentuk C yang menghubungkan dua bulatan. Rajah 2 menunjukkan satu contoh lengkung peralihan bentuk-C dan kedudukan bulatan Ω_1, Ω_2 , dengan pusat B_1, B_2 . Diberi jejari kedua-dua bulatan berkenaan masing-masing adalah r_1, r_2 . Untuk pembinaan lengkung peralihan ini, kami mencadangkan penggunaan tranformasi yang terdiri daripada pembesaran positif bersekala $k = r_1/r_2$ dengan pusat pembesaran adalah pada B_0 . Manakala B_s pula adalah titik pembahagi garis $B_1 B_2$ dengan nisbah $r_1 : r_2$. Maka diperolehi

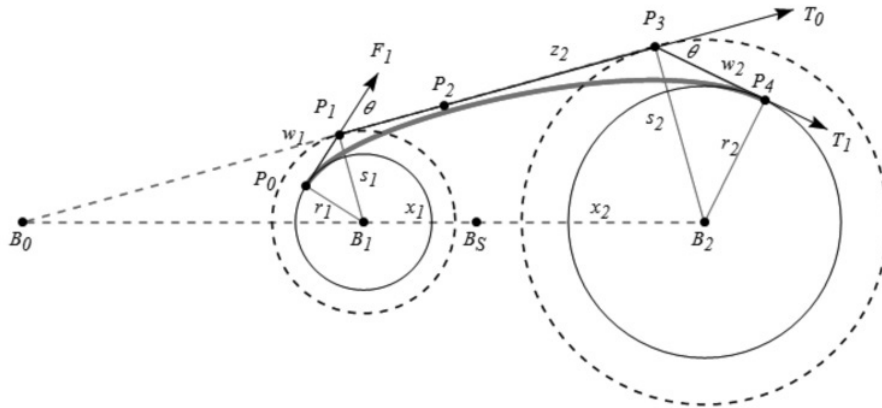
$$B_0 = \frac{B_2 r_1 - B_1 r_2}{r_1 - r_2}, \quad B_s = \frac{B_1 r_2 + B_2 r_1}{r_1 + r_2}. \quad (9)$$

Di sini kami hanya membincangkan pembinaan lengkung peralihan yang menghubungkan Ω_1 kepada Ω_2 dengan kelengkungan sentiasa negatif. Manakala bagi bentuk kelengkungan yang sebaliknya boleh diperolehi dengan cara yang serupa. Kaedah dimulakan dengan menetapkan beberapa sifat yang membantu untuk pembinaan lengkungan peralihan yang mudah difahami. Pertamanya, P_1, P_2 dan P_3 ditetapkan sebagai berkeadaan kolinear serta $P_1 P_3$ adalah tangen sepunya bagi kedua-dua bulatan dengan jarak serenjang daripada pusat bulatan adalah s_1 dan s_2 .

Kedua, diperkenalkan vektor-vektor unit T_0, T_1 dan F_1 seperti berikut;

$$T_0 = \frac{P_3 - P_1}{|P_3 - P_1|}, \quad F_1 = \frac{P_1 - P_0}{|P_1 - P_0|}, \quad T_1 = \frac{P_4 - P_3}{|P_4 - P_3|} \quad (10)$$

di mana $F_1 \wedge T_0 = T_0 \wedge T_1 = -\sin \theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Di samping menggunakan simbol pada (5), simbol tambahan yang digunakan adalah x_0 yang merujuk kepada jarak di antara B_0 dan B_2 . Hasi daripada manipulasi maklumat yang ada dan seterusnya daripada penggunaan (1), (2), (5), (9) dan (10), kita akan memperolehi syarat yang cukup sebagaimana disimpulkan dalam Teorem 3.2.1.



Rajah 2: Lengkung peralihan bentuk-C

Teorem 3.2.1 Diberi dua bulatan Ω_1, Ω_2 dengan masing-masing berpusat pada B_1, B_2 dan berjejari $r_1, r_2, r_1 < r_2$. Jika titik-titik kawalan bagi Bezier kuartik memenuhi syarat berikut;

$$P_0 = P_1 - w_1 F_1, \quad P_1 = P_2 - z_1 T_0, \quad P_s = \left(\frac{B_2 r_1 - B_1 r_2}{r_1 - r_2} \right) + z_s T_0, \quad P_3 = P_2 + z_2 T_0, \\ P_4 = P_3 + w_2 T_1, \quad (11)$$

dengan

$$T_0 = \left\langle \frac{\langle z_1 + z_2, -(s_1 - s_2) \rangle \cdot (B_2 - B_1)}{(B_2 - B_1) \cdot (B_2 - B_1)}, \frac{\langle s_1 - s_2, z_1 + z_2 \rangle \cdot (B_2 - B_1)}{(B_2 - B_1) \cdot (B_2 - B_1)} \right\rangle, \quad (12)$$

$$F_1 = \langle \langle \Upsilon, \Gamma \rangle \cdot T_0, \langle -\Gamma, \Upsilon \rangle \cdot T_0 \rangle, \quad T_1 = \langle \langle \Upsilon, -\Gamma \rangle \cdot T_0, \langle \Gamma, \Upsilon \rangle \cdot T_0 \rangle, \quad (13)$$

di mana

$$x_0 = \|B_2 - B_0\|, \quad x_s = \|B_s - B_0\|, \quad B_s = \frac{B_1 r_2 + B_2 r_1}{r_1 + r_2}, \quad B_0 = \frac{B_2 r_1 - B_1 r_2}{r_1 - r_2} \\ \Gamma = \frac{w_2}{s_2}, \quad = \frac{r_2}{s_2}, \quad w_2 = \sqrt{s_2^2 - r_2^2}, \quad (14)$$

$$s_1 = k s_2, z_2 = x_2 \sqrt{1 - \left(\frac{s_2}{x_0} \right)^2}, z_1 = k z_2, s_2 = \sqrt{\frac{r_2^2 (16x_0^2 - 9x_2^2) + r_2 \sqrt{576x_0^4 x_2^2 + r_2^2 (16x_0^2 - 9x_2^2)^2}}{32x_0^2}} \quad (15)$$

Maka (1) adalah satu segmen lengkungan berbentuk C yang unik dengan kelengkungan yang sentiasa negatif serta memiliki berkeselajaran G^2 pada titik-titik hujung.

Penyelesaian yang diperolehi dengan menggunakan teorem di atas adalah unik, ia tertakrif apabila $r_2 < s_2 < x_2$, selanjutnya memberi kita syarat $\|B_1 - B_2\| < \max(r_1, r_2)$.

BEBERAPA CONTOH BERANGKA

Berikut adalah dua contoh untuk lengkung peralihan bentuk-S dan C.

Contoh 4.1: Diberi bulatan-bulatan $\Omega_1: B_1 = (-10, 0)$, $r_1 = 6$, $\Omega_2: B_2 = (5.0)$, $r_2 = 6$. Diperolehi titik-titik kawalan adalah $P_0 = (-8.7412, -5.8665)$, $P_1 = (-4.6441, -4.9873)$, $P_2 = (0.0)$, $P_3 = (2.3221, 2.4937)$ dan $P_4 = (4.3706, 2.9332)$. Lengkung peralihan bentuk-S sebagaimana dalam Rajah 1.

Contoh 4.2: Diberi bulatan-bulatan $\Omega_1: B_1 = (-5, 0)$, $r_1 = 3$, $\Omega_2: B_2 = (10.0)$, $r_2 = 6$. Diperolehi titik-titik kawalan adalah $P_0 = (-7.5290, 6.1374)$, $P_1 = (-6.0823, 3.8810)$, $P_2 = (-1.4430, 5.1747)$, $P_3 = (7.8355, 7.7621)$ dan $P_4 = (12.6580, 5.3791)$. Lengkung peralihan bentuk-C ditunjukkan pada Rajah 2.

KESIMPULAN

Kertas ini telah berjaya membincangkan satu kaedah bagi membina secara terus satu lengkung peralihan yang menghubungkan dua bulatan untuk bentuk S dan C, yang memiliki keselajaran geometri berdarjah dua pada titik-titik sentuhannya. Pembinaan tersebut menggunakan perwakilan kuartik Bezier yang juga sebahagian daripada perwakilan NURBs, di mana ia adalah satu standard pada kebanyakan perisian geometri komputer masa kini. Dapatan secara terus diperolehi adalah hasil daripada beberapa ketetapan yang telah digunakan, oleh yang demikian kelemahan yang ditemui adalah tiadanya pilihan kepada lengkung peralihan yang dihasilkan. Dengan kata lain, kita tidak memperoleh keluarga lengkung peralihan bagi setiap kes yang dibincang. Namun, masalah ini boleh diatasi dengan melonggarkan syarat pada ketetapan yang dibuat, umpamanya tidak menjadikan s_1 , s_2 sebagai jarak serenjang daripada pusat-pusat bulatan dengan garis P_1 , P_3 . Walau bagaimanapun lengkung peralihan yang dicadangkan di dalam kertas ini sudah memadai bagi tujuan untuk menyelesaikan masalah interpolasi Hermite melalui kombinasi bersama beberapa segmen bulatan. Yang demikian itu adalah matlamat penyelidikan dalam kajian selanjutnya.

PENGHARGAAN

Setinggi-tinggi penghargaan yang tidak terhingga kepada Universiti Pendidikan Sultan Idris serta KPTM di atas segala sokongan melalui geran penyelidikan FRGS(2010-0066-102-02).

RUJUKAN

- Artin, E. (1957), *Geometric Algebra*. New York: Interscience.
- Azhar, A., Gobithasan, R. and Jamaludin, M.A. (2007), Transition curve using quartic Bezier curve. In: *Proceeding of CGIV07*, Bangkok, Thailand, 2-5 Ogos 2007: IEEE Comp Society Press, pp 223-228.
- Farin G. (1997), *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design; A practical Guide*, 4th Edition, Academic press, New York.
- Habib, Z. & Sakai, M. (2003a), Family of cubic transition curves, In: *Proceeding of GMAG'03-UK, IEEE, USA*, pp 118-122.
- Habib, Z. & Sakai, M. (2003b), G2 Planar cubic transition between two circles, *Intern Journal of Computer Mathematics* 80(8), pp. 957-965.
- Kang Y.W. & Jamaludin M.A. (2003), Rumus Am Lingkaran Kubik Bezier Satahan, *Jurnal Teknologi*, 38(C) Jun pp 15-28.
- Marsh, D., (1999). *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*. London: Springer-Verlag Limited 1999.
- Walton D.J. & Meek D.S., (1989), The use of Cornu spiral in drawing planar curves of controlled curvature, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 25, pp 69-78.
- Walton D.J. & Meek D.S., (1996a), A planar cubic Bezier spiral, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 72, pp 85-100.

- Walton D.J. & Meek D.S., (1996b), A Pythagorean hodograph quintic spiral, *Journal of Computer Aided Design* 72 (12), pp. 943-950.
- Walton D.J. & Meek D.S., (1999), Planar G^2 transition between two circles with a fair cubic curve, *Journal of Computer Aided Design* 31(1999), pp. 857-866.
- Walton D.J. & Meek D.S., (2004), A generalisation of the Pythagorean hodograph quintic spiral, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 172, pp 271-287.
- Walton D.J. & Meek D.S., (2007), G^2 curve design with a pair of Pythagorean Hodograph quintic spiral segments, *Journal of Computer Aided Geometric Design* 24, pp 267–285.
- Walton D.J., Meek D.S. & Ali, J.M., (2003), Planar G^2 transition curves composed of cubic Bezier spiral segments, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 157, pp 453-476.