OLIMPIAD MATEMATIK KEBANGSAAN (OMK) 2013

PERSATUAN SAINS MATEMATIK MALAYSIA (PERSAMA)

KATEGORI BONGSU

Julai 2013 Masa : 2 ½ Jam

ARAHAN KEPADA CALON

1. Lengkapkan maklumat diri dengan menulis nama, sekolah dan nombor kad pengenalan anda serta nama pusat pertandingan di muka hadapan kertas ini.

2. Isi dan tandatangan slip kedatangan pertandingan kemudian letakkan di penjuru kanan meja anda bersama kad pengenalan untuk disemak.

3. Kertas ini mengandungi **DUA (2)** bahagian.

4. Jawab **SEMUA** soalan dalam **BAHAGIAN A**.

5. Jawab **SEMUA** soalan dalam **BAHAGIAN B**.

6. Pastikan semua jawapan soalan-soalan dijawab di dalam kotak jawapan (**BAHAGIAN A**) dan di ruang kosong (**BAHAGIAN B**) yang disediakan.

7. Buku sifir dan mesin hitung **TIDAK BOLEH** digunakan.

Nama : ______________________________

No. Kad Pengenalan : ______________________________

Tingkatan : ______________________________

Nama Sekolah : ______________________________

Alamat Sekolah : ______________________________

Pusat Pertandingan : ______________________________

BAHAGIAN A						BAHAGIAN B			JUMLAH MARKAH
1	2	3	4	5	6	1	2	3	

- potong di sini -

SLIP KEDATANGAN PERTANDINGAN OMK 2013

Nama : ……………………………………..….. No. Kad Pengenalan : …………………

Nama Sekolah : ………………………..……. Tandatangan : …………………………..

Alamat Sekolah: ……………………………………………………...……………...……

ARAHAN: Tuliskan jawapan anda dalam kotak yang disediakan.

BAHAGIAN A: Jawab semua soalan.
(12 Markah)

SOALAN 1

BM Diberi suatu sisiempat *ABCD* dengan keadaan *AC* = *BC* = *BD*. Pepenjuru *AC* dan *BD* adalah serenjang. Jika $\angle BAC = 70^\circ$, di dalam darjah, apakah $\angle BDC$?

BI *Given a quadrilateral ABCD such that AC = BC = BD. The diagonals AC and BD are perpendicular. If* $\angle BAC = 70^\circ$, *what is* $\angle BDC$ *in degrees?*

Jawapan:	

SOALAN 2

BM Dalam suatu liga bolasepak, setiap pasukan bermain dengan pasukan yang lain hanya sekali. Setiap kemenangan mendapat 3 mata, setiap seri mendapat 1 mata dan setiap kekalahan mendapat 0 mata. Diketahui bahawa di penghujung liga, 10% daripada pasukan bertanding berkesudahan dengan 0 mata. Cari bilangan pasukan yang bertanding.

BI *In a football league, each team plays every other team once. Each win is worth* 3 *points, each draw* 1 *point, and each loss* 0 *point. It is known that at the end of the league,* 10% *of the teams end up with* 0 *point. Find the number of teams in the league.*

Jawapan:	

SOALAN 3

BM Terdapat empat integer melebihi 1 yang bersamaan dengan hasil tambah kuasa tiga bagi digit-digit mereka. Tiga daripadanya adalah 153, 370 dan 407 disebabkan

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3,\ 370 = 3^3 + 7^3 + 0^3,\ 407 = 4^3 + 0^3 + 7^3.$$

Apakah integer yang keempat?

BI *There are four integers greater than* 1 *which are equal to the sum of the cubes of their digits. Three of them are* 153, 370 *and* 407, *since*

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3,\ 370 = 3^3 + 7^3 + 0^3,\ 407 = 4^3 + 0^3 + 7^3.$$

What is the fourth integer?

Jawapan:	

SOALAN 4

BM Berapakah cara untuk memilih 3 nombor berbeza daripada $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sehinggakan kita dapat membentuk suatu segitiga dengan panjang sisi bersamaan dengan nombor-nombor tersebut?

Nota: 3, 2, 4 dan 4, 3, 2 dikira sebagai satu pilihan.

BI *How many ways are there to choose* 3 *different numbers in* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *such that we can form a triangle with side lengths equal to these numbers?*

***Note**:* 3, 2, 4 *and* 4, 3, 2 *are counted as one choice.*

Jawapan:	

SOALAN 5

BM Hasil tambah tiga nombor perdana adalah bersamaan dengan seperlima hasil darab mereka. Cari hasil tambah kuasa dua bagi nombor-nombor perdana tersebut.

BI *The sum of three primes equals one-fifth of their product. Find the sum of squares of these primes.*

Jawapan:	

SOALAN 6

BM Mimi menulis integer 1, 2, 3, …, 2013 di papan putih. Beliau kemudian memadam kesemua nombor gandaan 5. Jika beliau mendarab kesemua nombor yang tinggal di papan putih, apakah digit terakhir bagi hasil darab tersebut?

BI *Mimi wrote the integers* 1, 2, 3, …, 2013 *on a whiteboard. Then she erased all multiples of* 5*. If she multiplies all the remaining numbers on the whiteboard, what is the last digit of the product?*

Jawapan:	

ARAHAN: Semua jalan kerja penyelesaian mestilah ditunjukkan dengan jelas di ruang yang disediakan.

BAHAGIAN B: Jawab semua soalan
(18 Markah)

SOALAN 1

BM Diberi suatu segiempat tepat *ABCD* dengan *AB* = 32 dan *BC* = 24. Titik *F* dipilih pada *AB* dan titik *E* dipilih pada *CD* sebegitu rupa sehinggakan *AFCE* adalah suatu rombus.

(a) Cari panjang bagi *AF*.

(b) Cari panjang bagi *EF*.

BI *Given a rectangle ABCD with AB =* 32 *and BC =* 24*. Point F is chosen on AB and point E is chosen on side CD such that AFCE is a rhombus.*

(a) Find the length of AF.

(b) Find the length of EF.

SOALAN 2

BM Untuk menyemak sama ada suatu integer *N* boleh dibahagi dengan 11, kita meletakkan tanda + dan – silih berganti sebelum digit-digit *N* dan kira hasil tambah berkenaan. Hasil tambah tersebut boleh dibahagi dengan 11 jika dan hanya jika *N* juga boleh dibahagi dengan 11. Sebagai contoh, 7381 dan 2013 adalah boleh dibahagi dengan 11, disebabkan $+7 - 3 + 8 - 1 = 11$ dan $+2 - 0 + 1 - 3 = 0$ adalah boleh dibahagi dengan 11.

Dengan menggunakan setiap digit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 hanya sekali, bentukkan satu nombor tujuh digit yang boleh dibahagi dengan 55.

BI *To check whether an integer N is divisible by* 11*, we place the signs + and − alternately before the digits of N and calculate the resulting sum. The resulting sum is divisible by* 11 *if and only if N is divisible by* 11 *as well. For example,* 7381 *and* 2013 *are divisible by* 11*, since* $+7 - 3 + 8 - 1 = 11$ *and* $+2 - 0 + 1 - 3 = 0$ *are divisible by* 11.

Using each digit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 *once, form one seven-digit number divisible by* 55*.*

SOALAN 3

BM Palindrom adalah suatu integer positif yang tidak berubah jika ditulis secara songsang, seperti 505 dan 888. Cari purata bagi semua palindrom tiga digit.

BI *A palindrome is a positive integer that does not change if written in reverse order, such as* 505 *and* 888. *Find the average of all three-digit palindromes.*

OLIMPIAD MATEMATIK KEBANGSAAN (OMK) 2013

PERSATUAN SAINS MATEMATIK MALAYSIA (PERSAMA)

KATEGORI MUDA

Julai 2013 Masa : 2 ½ Jam

<u>ARAHAN KEPADA CALON</u>

1. Lengkapkan maklumat diri dengan menulis nama, sekolah dan nombor kad pengenalan anda serta nama pusat pertandingan di muka hadapan kertas ini.
2. Isi dan tandatangan slip kedatangan pertandingan kemudian letakkan di penjuru kanan meja anda bersama kad pengenalan untuk disemak.
3. Kertas ini mengandungi **DUA (2)** bahagian.
4. Jawab **SEMUA** soalan dalam **BAHAGIAN A**.
5. Jawab **SEMUA** soalan dalam **BAHAGIAN B**.
6. Pastikan semua jawapan soalan-soalan dijawab di dalam kotak jawapan (**BAHAGIAN A**) dan di ruang kosong (**BAHAGIAN B**) yang disediakan.
7. Buku sifir dan mesin hitung **TIDAK BOLEH** digunakan.

Nama : ______________________________

No. Kad Pengenalan : ______________________________

Tingkatan : ______________________________

Nama Sekolah : ______________________________

Alamat Sekolah : ______________________________

Pusat Pertandingan : ______________________________

BAHAGIAN A						**BAHAGIAN B**			**JUMLAH MARKAH**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**1**	**2**	**3**	

- - - - - - - - - - - - - - - - - - potong di sini - - - - - - - - - - - - - - - - - -

SLIP KEDATANGAN PERTANDINGAN OMK 2013

Nama : ………………………………………..….. No. Kad Pengenalan : …………………

Nama Sekolah : …………………………..……. Tandatangan : …………………………..

Alamat Sekolah: …………………………………………………………...……………...……

ARAHAN: Tuliskan jawapan anda dalam kotak yang disediakan.

BAHAGIAN A: Jawab semua soalan.
(12 Markah)

SOALAN 1

BM Bagi suatu sisiempat, panjang keempat-empat sisi dan salah satu daripada pepenjuru adalah 39, 79, 109, 199 dan 299 (tidak semestinya dalam turutan tersebut). Yang mana satukah merupakan panjang pepenjuru?

BI *In a quadrilateral, the four sides and one of the diagonals have lengths* 39, 79, 109, 199 *and* 299 *(not necessarily in that order). Which one is the length of the diagonal?*

Jawapan:	

SOALAN 2

BM Empat integer positif berbeza a, b, c dan d memenuhi

$$a^3 + b^3 = 1729 = c^3 + d^3 .$$

Cari nilai bagi $a + b + c + d$.

BI *Four distinct positive integers a, b, c and d satisfy*

$$a^3 + b^3 = 1729 = c^3 + d^3 .$$

Find the value of $a + b + c + d$.

Jawapan:	

SOALAN 3

BM Suatu nombor sepuluh digit ditulis menggunakan satu digit 1, dua digit 2, tiga digit 3 dan empat digit 4 dalam susunan sembarangan. Nombor tersebut boleh dibahagi dengan 3^k, k adalah integer. Apakah nilai terbesar yang mungkin bagi k?

BI *A ten-digit number is written using one digit* 1, *two digits* 2, *three digits* 3, *and four digits* 4, *in any order. The number is divisible by* 3^k, *where k is an integer. What is the greatest possible value of k?*

Jawapan:	

SOALAN 4

BM Tiga titik A, B, C dipilih pada suatu bulatan dengan keadaan segitiga ABC adalah sama sisi. Diberi suatu titik P pada lengkuk minor AC. Diketahui bahawa $PA = 45$ dan $PB = 60$. Apakah panjang bagi PC?

BI *Three points A, B, C are selected on a circle such that triangle ABC is equilateral. Given a point P on the minor arc AC. It is known that* $PA = 45$ *and* $PB = 60$. *What is the length of PC?*

Jawapan:	

SOALAN 5

BM Cari bilangan integer N yang memenuhi syarat berikut:
(i) $1 \le N \le 2013$,
(ii) digit terakhir bagi N^{99} adalah sama dengan digit terakhir bagi N.

BI *Find the number of integers N satisfying the following conditions:*
(i) $1 \le N \le 2013$,
(ii) the last digit of N^{99} *is equal to the last digit of N.*

Jawapan:	

SOALAN 6

BM Diberi

$$20! = 2\ 432\ 902\ 008\ 176\ 640\ 000.$$

Cari integer terbesar n dengan keadaan nombor $n!$ mempunyai tepat n digit.

Nota: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.

BI *Given that*

$$20! = 2\ 432\ 902\ 008\ 176\ 640\ 000.$$

Find the largest integer n such that the number n! has exactly n digits.

Note: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.

Jawapan:	

ARAHAN: Semua jalan kerja penyelesaian mestilah ditunjukkan dengan jelas di ruang yang disediakan.

BAHAGIAN B: Jawab semua soalan
(18 Markah)

SOALAN 1

BM Diberi suatu sisiempat *ABCD* dengan pepenjuru berserenjang. Diketahui bahawa terdapat suatu bulatan bertangen dengan semua sisi *ABCD*.

(a) Buktikan bahawa $AB + CD = BC + DA$ dan $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

(b) Buktikan bahawa *ABCD* adalah suatu lelayang.

BI *Given a quadrilateral ABCD with perpendicular diagonals. It is known that there is a circle tangent to all sides of ABCD.*

(a) *Prove that* $AB + CD = BC + DA$ *and* $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

(b) *Prove that ABCD is a kite.*

SOALAN 2

BM Misalkan *a*, *b* dan *c* integer dengan hasil tambah 0. Buktikan bahawa $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ adalah suatu kuasa dua sempurna.

BI *Let a, b and c be integers with sum* 0*. Prove that* $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ *is a perfect square.*

SOALAN 3

BM Suatu integer positif dikatakan *cantik* jika ia mengandungi rentetan 2013 (contohnya, 7201356 adalah cantik tetapi 20113 tidak). Berapa banyakkah integer *cantik* yang kurang daripada 1 000 000 000?

BI *A positive integer is said to be* beautiful *if it contains the string* 2013 *(for example,* 7201356 *is beautiful but* 20113 *is not). How many* beautiful *integers less than* 1 000 000 000 *are there?*

OLIMPIAD MATEMATIK KEBANGSAAN (OMK) 2013

PERSATUAN SAINS MATEMATIK MALAYSIA (PERSAMA)

KATEGORI SULONG

Julai 2013 Masa : 2 ½ Jam

ARAHAN KEPADA CALON

1. Lengkapkan maklumat diri dengan menulis nama, sekolah dan nombor kad pengenalan anda serta nama pusat pertandingan di muka hadapan kertas ini.
2. Isi dan tandatangan slip kedatangan pertandingan kemudian letakkan di penjuru kanan meja anda bersama kad pengenalan untuk disemak.
3. Kertas ini mengandungi **DUA (2)** bahagian.
4. Jawab **SEMUA** soalan dalam **BAHAGIAN A**.
5. Jawab **SEMUA** soalan dalam **BAHAGIAN B**.
6. Pastikan semua jawapan soalan-soalan dijawab di dalam kotak jawapan (**BAHAGIAN A**) dan di ruang kosong (**BAHAGIAN B**) yang disediakan.
7. Buku sifir dan mesin hitung **TIDAK BOLEH** digunakan.

Nama : ______________________

No. Kad Pengenalan : ______________________

Tingkatan : ______________________

Nama Sekolah : ______________________

Alamat Sekolah : ______________________

Pusat Pertandingan : ______________________

BAHAGIAN A						BAHAGIAN B			JUMLAH MARKAH
1	2	3	4	5	6	1	2	3	

- - - - - - - - - - - - - - - - potong di sini - - - - - - - - - - - - - - - -

SLIP KEDATANGAN PERTANDINGAN OMK 2013

Nama : ……………………………………..….. No. Kad Pengenalan : …………………

Nama Sekolah : …………………………..……. Tandatangan : …………………………..

Alamat Sekolah: ……………………………………………………...……………...……

ARAHAN: Tuliskan jawapan anda dalam kotak yang disediakan.

BAHAGIAN A: Jawab semua soalan.
(12 Markah)

SOALAN 1

BM Suatu kiub besar dibahagikan kepada 99 kiub dengan panjang sisi bernilai integer, 98 daripadanya dengan sisi 1. Cari isipadu bagi kiub besar tersebut.

BI *A large cube is divided into* 99 *cubes with integer lengths,* 98 *of them with side* 1. *Find the volume of the large cube.*

Jawapan:	

SOALAN 2

BM Misalkan *M* suatu set bagi semua integer positif sembilan digit yang mengandungi setiap digit daripada 1 hingga 9 hanya sekali. Cari faktor sepunya terbesar bagi semua unsur di dalam *M*.

BI *Let M be the set of all nine-digit positive integers that contain each digit from* 1 *to* 9 *once. Find the highest common factor of all elements of M.*

Jawapan:	

SOALAN 3

BM Apakah bakinya apabila 5^{5555} dibahagikan dengan 10 000?

BI *What is the remainder when* 5^{5555} *is divided by* 10 000*?*

Jawapan:	

SOALAN 4

BM Diberi suatu trapezium dengan pepenjuru berserenjang dan ketinggian 12. Panjang salah satu pepenjuru adalah 15. Cari luas trapezium tersebut.

BI *Given a trapezium with perpendicular diagonals and height* 12*. The length of one of its diagonals is* 15*. Find the area of the trapezium.*

Jawapan:	

SOALAN 5

BM Digit-digit bagi 2013 boleh disusun untuk membentuk suatu janjang aritmetik. Tentukan bilangan integer positif empat digit yang memiliki sifat ini.

Nota: Suatu janjang aritmetik mungkin mempunyai beza sepunya 0.

BI *The digits of* 2013 *can be rearranged to form an arithmetic progression. Determine the number of four-digit positive integers with this property.*

Note*: An arithmetic progression might have common difference* 0.

Jawapan:	

SOALAN 6

BM Tentukan faktor perdana terkecil bagi 8051.

BI *Determine the smallest prime factor of* 8051.

Jawapan:	

ARAHAN: Semua jalan kerja penyelesaian mestilah ditunjukkan dengan jelas di ruang yang disediakan.

BAHAGIAN B: Jawab semua soalan
(18 Markah)

SOALAN 1

BM Diberi suatu segitiga *ABC*. Titik tengah bagi *AB*, *BC*, *CA* masing-masing adalah C_1, A_1, B_1. Satu lagi segitiga *DEF* dibina dengan panjang sisi-sisi adalah sama dengan panjang AA_1, BB_1, CC_1.

(a) Buktikan bahawa nisbah bagi luas segitiga *DEF* berbanding luas segitiga *ABC* adalah suatu pemalar, tanpa menghiraukan pemilihan segitiga *ABC*.

(b) Cari luas segitiga *DEF* jika *AB* = 13, *BC* = 14, *CA* = 15.

BI *Given a triangle ABC. The midpoints of AB, BC, CA are* C_1, A_1, B_1 *respectively. Construct another triangle DEF with side lengths equal to the lengths of* AA_1, BB_1, CC_1.

(a) Prove that the ratio of the area of triangle DEF to the area of triangle ABC is a constant, regardless of the choice of triangle ABC.

(b) Find the area of triangle DEF if AB = 13, *BC* = 14, *CA* = 15.

SOALAN 2

BM Buktikan bahawa wujud integer $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2013}, b,$ kesemuanya lebih besar daripada 1, dengan keadaan

$$(a_1 !)(a_2 !)(a_3 !)\ldots(a_{2013} !) = b! \ .$$

BI *Prove that there exist integers* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2013}, b,$ *all greater than* 1, *such that*

$$(a_1 !)(a_2 !)(a_3 !)\ldots(a_{2013} !) = b! \ .$$

SOALAN 3

BM Suatu jujukan $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ditakrif seperti berikut: $x_1 = 1,\ x_2 = 143$ dan

$$x_{n+1} = \frac{5(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n}$$

untuk semua $n \geq 2$. Buktikan bahawa kesemua sebutan bagi jujukan tersebut adalah integer.

BI *A sequence* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *is defined as follows:* $x_1 = 1,\ x_2 = 143$*, and*

$$x_{n+1} = \frac{5(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n}$$

for all $n \geq 2$. *Prove that all terms of the sequence are integers.*